Ejercicio 1 Colisiones Junio (mod1) 2020 (Análisis)

(2'5 puntos) Calcula a sabiendo que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1-x)}-\frac{ax-1}{x}\right)=\frac{7}{2}$ (ln denota la función logaritmo neperiano)

Solución

(2'5 puntos) Calcula a sabiendo que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1-x)}-\frac{ax-1}{x}\right)=\frac{7}{2}$ (ln denota la función logaritmo neperiano)

En mi modesta opinión hubiera sido preferible cambiar el enunciado por "Calcula a sabiendo que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-(ax-1)\cdot\ln(1-x)}{x\cdot\ln(1-x)}\right)=\frac{7}{2}$, pues si no "puedes cometer el siguiente error al calcular el límite":

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1-x)}-\frac{ax-1}{x}\right)=\left(\frac{1}{\ln(1)}-\frac{-1}{0}\right)=\left(\frac{1}{0}-\frac{-1}{0}\right)=\infty-(-\infty)=\infty+\infty=\infty$, *y como tiene que salir 7/2 te quedas a cuadritos*.

El límite dado es del tipo $\infty-\infty$, pero hay que calcular detenidamente los límites laterales para verlo (sigo pensando que hay que ser un lince para verlo):

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{\ln(1-x)}-\frac{ax-1}{x}\right)=\left(\frac{1}{\ln(1^+)}-\frac{-1}{0^-}\right)=\left(\frac{1}{0^+}-\frac{-1}{0^-}\right)=+\infty-(+\infty)=+\infty-\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\ln(1-x)}-\frac{ax-1}{x}\right)=\left(\frac{1}{\ln(1^-)}-\frac{-1}{0^+}\right)=\left(\frac{1}{0^-}-\frac{-1}{0^+}\right)=-\infty-(-\infty)=-\infty+\infty.$$

Realizada esta salvedad calculamos ya el límite. (Pondremos directamente 0 cuanto salga ln(1))

$$\frac{7}{2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-(ax-1)\cdot\ln(1-x)}{x\cdot\ln(1-x)}\right)=\left\{\frac{0-(-1)\cdot 0}{0\cdot 0}=\frac{0}{0},L'H\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-[\,a\cdot\ln(1-x)+(ax-1)\cdot\frac{-1}{(1-x)}}{1\cdot\ln(1-x)+x\cdot\frac{-1}{(1-x)}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-a\cdot\ln(1-x)+\frac{ax-1}{1-x}}{1\cdot\ln(1-x)-\frac{x}{1-x}}\right)=\left\{\frac{1-0-1}{0-0}=\frac{0}{0};L'H\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{0-a\cdot\frac{-1}{1-x}+\frac{a\cdot(1-x)-(1-ax)(-1)}{(1-x)^2}\,]}{\frac{-1}{1-x}-\frac{1\cdot(1-x)+x(-1)}{(1-x)^2}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{a}{1-x}+\frac{a\cdot(1-x)-(1-ax)(-1)}{(1-x)^2}\,]}{\frac{-1}{1-x}-\frac{1\cdot(1-x)+x(-1)}{(1-x)^2}}\right)=\frac{a+a-1}{-1-1+0}=\frac{2a-1}{-2},$$ es

decir $7/2=(2a-1)/(-2)\ \to\ -7=2a-1\ \to\ -6=2a$, de donde $\mathbf{a=-3}$.

Ejercicio 2 Colisiones Junio (mod1) 2020 (Análisis)

(2'5 puntos) Sea f la función definida por $f(x)=\frac{-x^3+2x-3}{x^2-x}$ para $x\neq 0$, $x\neq 1$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(2, 3\ln(2))$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.

Solución

Tenemos $F(x)=\int\frac{-x^3+2x-3}{x^2-x}dx$, que es una integral racional.

Como el numerador es de grado mayor o igual que el denominador tengo que realizar la división entera primero:

$$\begin{array}{r|l} -x^3+2x-3 & x^2-x \\ \cline{2-2} +x^3-x^2 & -x-1 \\ \hline -x^2+2x-3 & \\ x^2-x & \\ \hline x-3 & \end{array}$$

$$F(x)=\int\frac{-x^3+2x-3}{x^2-x}dx=\int(\text{Cociente})dx+\int\frac{\text{Resto}}{\text{Divisor}}dx=\int(-x-1)dx+\int\frac{x-3}{x^2-x}dx=\frac{-x^2}{2}-x+I_1$$

$$I_1=\int\frac{x-3}{x(x-1)}\cdot dx=\{\text{dos raíces, 0 y 1}\}=\int\frac{A}{x}dx+\int\frac{B}{x-1}dx=A\cdot\ln|x|+B\cdot\ln|x-1|=\{++\}=3\cdot\ln|x|-2\cdot\ln|x-1|$$

{++} Calculamos A y B

$$\frac{x-3}{x\cdot(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x)}{x\cdot(x-1)}$$

Igualando numeradores:

$x - 3 = A(x - 1) + B(x)$. Sustituimos “x” por el valor de las raíces del denominador (0 y 1).

Para $x = 0$, tenemos $-3 = -A$, de donde $A = 3$.

Para $x = 1$, tenemos $-2 = B(1)$, de donde $B = -2$.

Luego $F(x) = \int \frac{-x^3+2x-3}{x^2-x}dx = \frac{-x^2}{2} - x + I_1 = \frac{-x^2}{2} - x + 3\cdot\ln|x| - 2\cdot\ln|x-1| + K$ **.**

Como $F(2) = 3\cdot\ln(2) \rightarrow 3\cdot\ln(2) = \frac{-4}{2} - 2 + 3\cdot\ln|2| - 2\cdot\ln|2-1| + K = -4 + 3\cdot\ln(2) - 0 + K$, tenemos $K = 4$, y por tanto **la primitiva pedida es** $\mathbf{F(x) =} \frac{-x^2}{2} - x + 3\cdot\ln|x| - 2\cdot\ln|x-1| + 4$**.**

Ejercicio 3 Colisiones Junio (mod1) 2020 (Algebra)

(2’5 puntos) Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ c & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determina a, b y c, sabiendo que AB = C y la matriz A tiene rango 2.

Solución

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ c & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determina a, b y c, sabiendo que AB = C y la matriz A tiene rango 2.

En $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ c & 1 & 4 \end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$, rango(A) = 2, por tanto $\det(A) = |A| = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ c & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2-C_1 \\ C_3-C_1 \\ \ \end{matrix} =$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & b-1 \\ c & 1-c & 4-c \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = 1\cdot(a-1)(4-c) - (b-1)(1-c) - 0 + 0 = 4a - ac - 4 + c - (b - bc - 1 + c) = 0 =$

$= 4a - ac - 4 + c - b + bc + 1 - c = 4a - ac - b + bc - 3 = 0.$

De $AB = C \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ c & 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1+a+b \\ c+1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1+a+b \\ c+5 \end{pmatrix}$, igualando tenemos $3 = 3$ (cierto), $c + 5 = 1$, de donde $\mathbf{c = -4}$ y $2 = 1 + a + b$, de donde $b = 1 - a$. Entrando en $4a - ac - b + bc - 3 = 0$, tenemos:

$4a - a(-4) - (1 - a) + (1 - a)(-4) - 3 = 0 = 8a - 1 + a - 4 + 4a - 3 = 13a - 8 = 0 \rightarrow \mathbf{a = 8/13}$, y por tanto $\mathbf{b} = 1 - a = 1 - 8/13 \mathbf{= 5/13.}$

Los valores pedidos son a = 8/13, b = 5/13 y c = -4.

Ejercicio 4 Colisiones Junio (mod1) 2020 (Geometría)

Considera el tetraedro de vértices A(0, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 1, 3) y D(1 0, 3).

(a) Calcula el volumen de dicho tetraedro. (1 punto)

(b) Calcula la medida de la altura trazada desde el vértice A de dicho tetraedro. (1’5 puntos)

Solución

Considera el tetraedro de vértices A(0, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 1, 3) y D(1, 0, 3).

(a)

Calcula el volumen de dicho tetraedro.

Sabemos que el volumen de un tetraedro de vértices A, B, C y D es un sexto del volumen del paralelepípedo que determinan los vectores **AB**, **AC** y **AD**, es decir un sexto del valor absoluto del producto mixto que determinan los vectores **AB**, **AC** y **AD**, es decir $V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\cdot|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]|$.

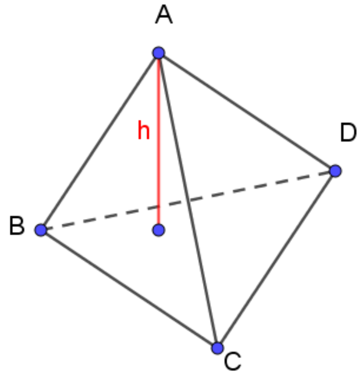
AB = (1, 1, 0); **AC** = (0, 1, 3) ; **AD** = (1, 0, 3)

Volumen del tetredro = (1/6)·| [**AD**,**AB**,**AC**] | = $\frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix}\text{Adjuntos}\\ \text{primera}\\ \text{fila}\end{matrix}\right|$ = (1/6)·| 1(3 - 0) – 0 + 3(1 - 0) | u^3 =

= (1/6)·| 6 | u^3 **= 1 u^3.**

(b)

Calcula la medida de la altura trazada desde el vértice A de dicho tetraedro.



Como me piden la altura desde el vértice a la base del tetraedro, de la expresión:

Volumen tetraedro = (1/3)·(área base)·(altura) = (1/3)·(1/2)·||**BC**x**BD**||·h = (1/6)·||**BC**x**BD**||·h = 1 u^3, de donde h = (6)/(||**BC**x**BD**||), de donde ||**BC**x**BD**|| es el módulo del producto mixto de los vectores)·||**BC**x**BD**|| y **BD**.

BC = (-1, 0, 3), **BD** = (0, -1, 3); **BC**x**BD** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix}\text{Adjuntos}\\ \text{primera}\\ \text{fila}\end{matrix}$ = **i**(0+3) – **j**(-3-0) + **k**(1-0) = (3, 3, 1), de donde

||**BC**x**BD**|| = $\sqrt{(3^2+3^2+1^2)}$ u^2 = $\sqrt{(19)}$ u^2, por tanto **h** = (6)/($\sqrt{(19)}$) u^1 **= [6·$\sqrt{(19)}$] / (19) u^1.**

Otra forma de hacerlo

Calculamos el plano que pasa por B, C, D. Punto el B(1, 1, 0) y vector normal **n = BC**x**BD** = (3, 3, 1), con lo cual $\pi \equiv$ **AX•n** = (x-1, y-1, z)•(3, 3, 1) = 3x + 3y + z – 6 = 0

$$d(A;\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|3(0)+3(0)+(0)-6|}{\sqrt{3^2+3^2+1^2}}\ u^1 = \frac{|-6|}{\sqrt{19}}\ u^1 = \frac{6}{\sqrt{19}}\ u^1 = \frac{6\cdot\sqrt{19}}{19}\ u^1.$$

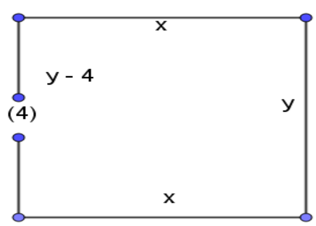
Ejercicio 5 Colisiones Junio (mod1) 2020 (Análisis)

(2’5 puntos) Una familia desea acotar una zona rectangular en el jardín de su casa para dedicarla al cultivo ecológico. Para ello dispone de 96 metros de valla, pero necesita dejar una abertura de 4 metros en uno de los laterales para instalar una puerta. Determina las dimensiones de la zona rectangular de área máxima que puede acotarse de esta manera y el valor del área.

Solución

Una familia desea acotar una zona rectangular en el jardín de su casa para dedicarla al cultivo ecológico. Para ello dispone de 96 metros de valla, pero necesita dejar una abertura de 4 metros en uno de los laterales para instalar una puerta. Determina las dimensiones de la zona rectangular de área máxima que puede acotarse de esta manera y el valor del área.

Es un problema de optimización



Función a optimizar: A(x,y)) = Área = x·y

Relación: 2x + 2y – 4 = 96 $\rightarrow$ x + y = 50 $\rightarrow$ y = 50 – x, luego A(x) = x·(50 – x) = 50x – x^2.

Optimizamos: A ‘(x) = 50 – 2x = 0, x = 25 posible extremo. Como A ‘’(x) = -2 < 0, x = 25 es un máximo relativo.

Las dimensiones del rectángulo son x = 25 m e y = 25 m.
El área pedida es A = (25 m)·(35 m) **= 625 m^2.**

Ejercicio 6 Colisiones Junio (mod1) 2020 (Análisis)

(2'5 puntos) Calcula $\int \ln(x^2+2x+2)dx$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.
(Sugerencia: efectúa el cambio de variable t = x + 1).

Solución

Calcula $\int \ln(x^2+2x+2)dx$ donde ln denota la función logaritmo neperiano. (cambio t = x + 1).

$$\int \ln(x^2+2x+2)dx = \int \ln((x+1)^2+1)dx = \left\{ \begin{matrix} x+1=t \\ dx=dt \end{matrix} \right\} = \int \ln(t^2+1)dt = \left\{ \begin{matrix} u=\ln(t^2+1) \Rightarrow du = \frac{2tdt}{t^2+1} \\ dv = dt \quad \Rightarrow \quad v = \int dt = t \end{matrix} \right\} =$$

$$= t\cdot\ln(t^2+1) - \int t\cdot\frac{2tdt}{t^2+1} = t\cdot\ln(t^2+1) - 2\int\frac{t^2dt}{t^2+1} = t\cdot\ln(t^2+1) - 2\int\frac{t^2+1dt}{t^2+1} - 2\int\frac{-1dt}{t^2+1} = t\cdot\ln(t^2+1) - 2\int dt + 2\int\frac{dt}{t^2+1} =$$

$= t\cdot\ln(t^2+1) - 2t + 2\cdot\text{artag}(t) + K =$ {Quito cambio} $\mathbf{= (x+1)\cdot\ln((x+1)^2+1) - 2(x+1) + 2\cdot artag(x+1) + K.}$

Ejercicio 7 Colisiones Junio (mod1) 2020 (Algebra)

(2'5 puntos) Siendo λ un número real, considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas $\left\{ \begin{matrix} x+\lambda y = 2 \\ 2x+4y=1 \\ \lambda x + y = 2\lambda \end{matrix} \right.$

Discútelo según los valores de λ y resuélvelo cuando sea posible.

Solución

Siendo λ un número real, considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\left\{ \begin{matrix} x+\lambda y = 2 \\ 2x+4y=1 \\ \lambda x + y = 2\lambda \end{matrix} \right.$$

Discútelo según los valores de λ y resuélvelo cuando sea posible.

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 2 & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ \lambda & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

En A como sólo tiene dos columnas **rango(A) < 3 siempre**.

En A* como $|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ \lambda & 1 & 2\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ C_1-2C_3 \\ C_2-4C_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -3 & \lambda-4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3\lambda & 1-4\lambda & 2\lambda \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda fila $= -0+0-1(-3+12\lambda+3\lambda^2-12\lambda) = 3\lambda^2 - 3$.

De $|A^*| = 0 \rightarrow 3\lambda^2 - 3 = 0 \rightarrow \lambda^2 = 1 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{(1)} \rightarrow \lambda = \pm 1$.

Si a $\neq \pm 1$, rango(A) $\neq$ rango(A*) = 3, por el Teorema de Rouche, el **sistema es incompatible y no tiene solución.**

Si a = ± 1, $\left(\text{En A como} \begin{vmatrix} 1 & \pm 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$ tenemos **rango(A) = rango(A*) = 2** = número de incógnitas, por el Teorema de Rouche, el **sistema es compatible y determinado y tiene una única solución**.

Como para $\lambda = \pm 1$, el rango es 2, sólo necesitamos dos ecuaciones. Utilizo la primera y la segunda:

Si λ = -1, $\left\{ \begin{matrix} x-y=2 \\ 2x+4y=1 \\ -x+y=-2 \end{matrix} \right. \approx \left\{ \begin{matrix} x-y=2 \\ 2x+4y=1 \ (E_2+4E_1) \end{matrix} \right. \approx \left\{ \begin{matrix} x-y=2 \\ 6x=9 \end{matrix} \right.$, de donde x = 9/6 = 3/2 e y = 3/2-2 = -1/2, **y la**

solución del sistema es (x y) = (3/2, -1/2).

Si λ = 1, $\begin{cases} x + y \ = 2 \\ 2x + 4y = 1 \\ x + y \ = 2 \end{cases} \approx \begin{cases} x + y \ = 2 \\ 2x + 4y = 1 \ (E_2\text{-}2E_1) \end{cases} \approx \begin{cases} x + y \ = 2 \\ \quad 2y \ = -3 \end{cases}$, de donde y = -3/2 y x = 2+3/2 = 7/2, **y la solución del sistema es (x y) = (7/2, -3/2).**

Ejercicio 8 Colisiones Junio (mod1) 2020 (Geometría)

Se considera los puntos A(-1, 3, 2), B(2, -1, -1) y C(a - 2, 7, b).
(a) Determina a y b para que los puntos A, B y C estén alineados. (1'25 puntos)
(b) En el caso de a = b = 1, halla la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene a los puntos A, B y C. (1'25 puntos)

Solución

Se considera los puntos A(-1, 3, 2), B(2, -1, -1) y C(a - 2, 7, b).
(a)
Determina a y b para que los puntos A, B y C estén alineados.

Los puntos A, B y C estén alineados si los vectores **AB** = (3, -4, -3) y **AC** = (a-1, 4, b-2) son proporcionales, es decir: (a – 1)/ 3 = 4/(-4) = (b-2)/(-3).
De (a – 1)/ 3 = -1 $\rightarrow$ a – 1 = -3 $\rightarrow$ **a = -2.**
De -1 = (b-2)/(-3) $\rightarrow$ 3 = b - 2 $\rightarrow$ **b = 5.**
(b)
En el caso de a = b = 1, halla la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene a los puntos A, B y C.
Para a = b = 1, tenemos A(-1, 3, 2), B(2, -1, -1) , C(- 1, 7, 1), **AB** = (3, -4, -3) y **AC** = (0, 4, -1).
La recta pedida pasa por el punto O(0, 0, 0) y tiene como vector director **u** el vector normal del plano, es decir **u** = **n** = **AB**x**AC** (x es el producto vectorial).

$$\mathbf{u} = \mathbf{n} = \mathbf{AB}\text{x}\mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = \mathbf{i}(4+12) - \mathbf{j}(-3-0) + \mathbf{k}(12-0) = (16, 3, 12).$$

La recta pedida en forma continua es x/16 = y/3 = z/12.